



Application du produit scalaire au calcul d'angles et de longueur

Objectifs :

- Application à la détermination d'une équation de cercle défini par son centre et son rayon ou par son diamètre
- Application à la trigonométrie : Formules d'addition et de duplication en trigonométrie
- Application aux calculs d'angles et de longueurs dans des triangles : Théorème de la médiane, Formule d'Al Kashi

Aperçu historique : Se référer au Chapitre ??.

1. Équation cartésienne d'un cercle dans le plan

Propriété 10.1 Le plan est muni d'un repère orthonormal. Le cercle de centre A et de rayon R a pour équation cartésienne :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

Démonstration Un point $M(x; y) \in \mathcal{C}_{A,R}$ si et seulement si $AM = R$. Or AM et R sont des distances donc des réels positifs ; d'où $M(x; y) \in \mathcal{C}_{A,R}$ si et seulement si $AM^2 = R^2$. Cette dernière égalité est équivalente à l'équation proposée dans la propriété.

Propriété 10.2 Soit A et B deux points distincts dans le plan. L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration On a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ si et seulement si $M = A$ ou $M = B$ ou ABM est rectangle en M . Le dernier cas nous donne le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B ; les deux premiers cas « complètent » le cercle.

Exemple 10.1 Dans un repère orthonormé, on donne $A(3; 2)$ et $B(-1; 4)$. Déterminons l'équation du cercle de diamètre $[AB]$:

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{C}_{[AB]} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) + (y - 2)(y - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 + y^2 - 6y + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 - 3 + (y - 3)^2 - 9 + 8 = 0 \quad (\text{Mise sous forme canonique}) \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5 \end{aligned}$$

Donc le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre $\Omega(1; 3)$ et pour rayon $r = \sqrt{5}$.

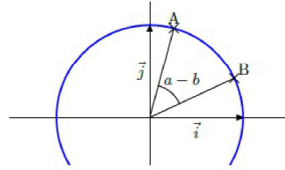
2. Applications du produit scalaire à la trigonométrie

A. Formules d'addition

Propriété 10.3 Soit a et b deux réels. Alors :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Démonstration Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique associé. Si a et b sont deux réels, on note A et B les points de $\mathcal{C}$ correspondants. Leurs coordonnées sont alors $A(\cos(a); \sin(a))$ et $B(\cos(b); \sin(b))$ (Voir ci-contre).



On a $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$.

En utilisant l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormal ($\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ ont les mêmes coordonnées que A et B) on a : $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$. D'où la deuxième égalité.

En posant $b' = -b$ on obtient $\cos(a+b') = \cos(a)\cos(-b') + \sin(a)\sin(-b') = \cos(a)\cos(b') - \sin(a)\sin(b')$ (c'est-à-dire la première égalité).

On a :

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b) \\ &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Enfin, en posant $b' = -b$ dans cette troisième égalité, on obtient la quatrième.

B. Formules de duplication

Propriété 10.4 Soit a un réel. Alors :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \text{ et } \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

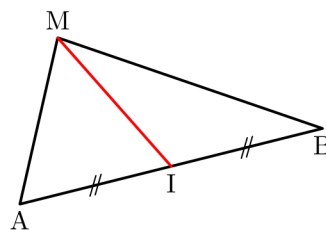
Démonstration il suffit d'appliquer les formules de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ en prenant $b = a$.

3. Applications du produit scalaire au calcul de longueurs

A. Théorème de la médiane

Théorème 10.1 (de la médiane) Soit ABM un triangle et I le milieu de $[AB]$. Alors on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



Démonstration L'idée de la démonstration¹ est d'écrire les distances au carré comme des carrés scalaires et ensuite de décomposer les vecteurs avec la relation de CHASLES ; il reste alors à développer en utilisant les identités remarquables. On a :

$$\begin{aligned}
 MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\
 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\
 &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\
 &= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \\
 &= 2MI^2 + \frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} \\
 &= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2
 \end{aligned}$$

Exemple 10.2 (Application) $ABCD$ est un parallélogramme de centre I . On donne $AB = 7$, $AD = 5$ et $BD = 8$.

Calculer AC .

Dans ABC , I est le milieu de $[AC]$. On a donc : $BA^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}AC^2$. Or $BI = \frac{1}{2}BD$; en remplaçant, on obtient :

$$AC^2 = 2 \left(BA^2 + BC^2 - 2 \left(\frac{1}{2}BD \right)^2 \right) = 2(7^2 + 5^2 - 2 \times 4^2) = 84$$

Donc $AC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.

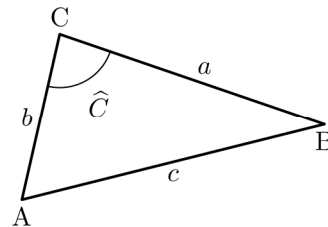
Exemple 10.3 (Application) En utilisant une démonstration analogue à celle du théorème de la médiane, montrer que si ABM est un triangle avec I milieu de $[AB]$ on a les deux égalités suivantes :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}; \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$$

B. Théorème d'Al-Kashi ("Pythagore généralisé")

Théorème 10.2 (d'AL-KASHI^a) Soit ABC un triangle quelconque. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Alors :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C})$$



^a. AL-KASHI de son nom complet GHIYATH AD-DIN JAMSHID MAS'UD AL-KASHI : mathématicien et astronome perse du XV^e siècle. Il réussit à déterminer une valeur de π avec 15 décimales ; il faudra attendre deux siècles pour battre ce record.

Démonstration Il suffit d'écrire :

$$c^2 = AB^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 = b^2 + a^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C})$$

Remarque 10.1 On obtient de la même façon :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\widehat{B}) \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A})$$

C. Trigonométrie dans le triangle (compléments)

Propriété 10.5 (Aire d'un triangle) Soit ABC un triangle. En utilisant les notations du théorème d'AL-KASHI on a :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac \sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab \sin(\widehat{C})$$

Démonstration Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) . Alors $\mathcal{A} = \frac{1}{2}AB \times CH$ et $CH = AC \sin(\widehat{A})$ ou $CH = AC \sin(\pi - \widehat{A}) = AC \sin(\widehat{A})$ (suivant si $\widehat{A}$ est aigu ou obtu). D'où le premier résultat ; les autres s'obtiennent de la même manière.

Propriété 10.6 (des sinus) Soit ABC un triangle. En utilisant les notations du théorème d'AL-KASHI on a :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$$

Démonstration On utilise l'égalité de la propriété ?? et on divise chaque membre par $\frac{1}{2}abc$. On obtient :

$$\frac{2\mathcal{A}_{ABC}}{abc} = \frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$$

Par passage à l'inverse, on obtient le résultat annoncé.